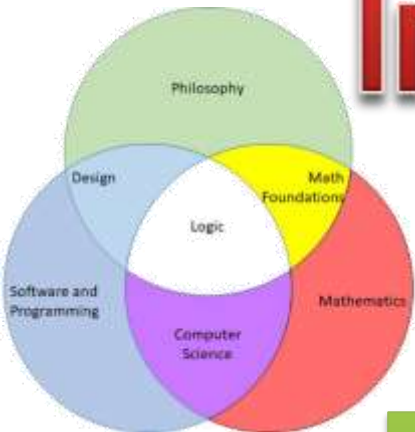
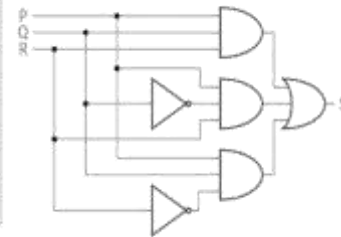


# Initiation à Logique Mathématique



Input			Output
P	Q	R	S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0



$$(PAQA R) \vee (PA-QAR) \vee (PAQA-R)$$

les bases des algorithmes

BY : BENAÏSSI Sellami

s.benaissi@gmail.com



OCT 2022

# PLAN

**Part 1**

# Introduction

# La logique

du grec ancien

λογική

logikê

*est un terme  
dérivé de*

λόγος

lógos

signifiant à la fois

« **raison** », « **langage** » et « **raisonnement** »

est, dans une première approche, l'étude des règles formelles que doit respecter toute argumentation correcte.

# La logique

On peut dire que la logique est une formalisation des lois qui font si un **raisonnement** est **correct**, au-delà de son **contenu**.

Exemple:

- ✓ **s'il neige**, alors il fait **froid**.
  - ✓ Il **neige**,
  - ✓ Donc il fait **froid**
- De la forme «**si X alors Y**»

# La logique

La logique est la science des **arguments valides** en vertu de leur **forme uniquement**.

Le but de la logique est de **distinguer** les arguments valides de part leur forme des autres. Pour cela, les logiciens ont construit des **langages particuliers**, des langages formels . Ces langages font complètement **abstraction** du contenu des expressions, pour ne retenir que leur **structure logique**.

# La logique

Elle est depuis l'Antiquité l'une des grandes disciplines de la philosophie.

En outre, on a assisté depuis le XIXe siècle au développement fulgurant d'une approche mathématique de la logique. Sa convergence opérée avec l'informatique depuis la fin du XXe siècle lui a donné un regain de vitalité.

---

**Logique philosophique**

---

**Logique mathématique**

---

**Logique informatique**



# Logique philosophique

La motivation des philosophes antiques comme Aristote est de déterminer si un raisonnement est **concluant**. Par exemple, le raisonnement suivant est concluant :

- « **Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel** » ;
- « **Toutes les souris sont vertes, or Yoda est une souris, donc Yoda est vert** » est un raisonnement valide mais non concluant car au moins une prémisse est fausse, tandis que
- « **Tous les humains sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est humain** » n'est pas concluant car l'inférence n'est pas valide – on parle alors de raisonnement fallacieux ou de non sequitur.

concluant

حاسم، قطعي

le prémisse

مقدمات منطقية

raisonnement fallacieux

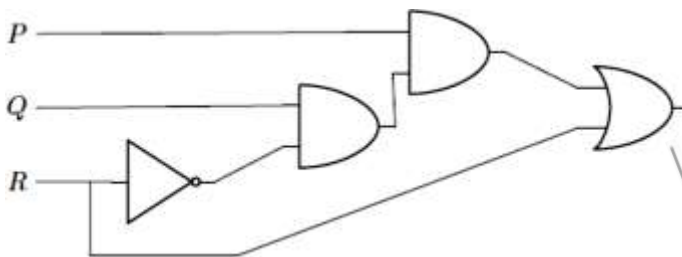
منطق مضلل

# Logique informatique

La logique est utilisée en informatique pour modéliser de manière formelle des “objets” rencontrés par les informaticiens ;

- Logique informatique
  - Circuits logiques
  - Complexité algorithmique
  - Problèmes « combinatoires »
  - Programmation logique
  - Bases de données
  - Vérification de programmes
  - Ontologies et web sémantique
  - Systèmes experts et règles de production
  - L'intelligence artificielle

				3		8 5
		1		2		
			5		7	
		4				1
	9					
5						7 3
		2		1		
				4		
						9



```
SELECT Vols.depart
FROM Vols JOIN Aeroports ON Vols.arrivee = Aeroports.nom
WHERE Aeroports.pays = 'FR'
```

C'est le thème d'étude de ce cours.

## Interaction entre logique et mathématiques

- ✓ Théorie des modèles (Algèbre)
- ✓ Théorie des groupes, Combinatoire
- ✓ Théorie des ensembles, de la mesure,...
- ✓ Théorie de la calculabilité,
- ✓ Théorie de la démonstration
- ✓ Algèbre linéaire

## Part 2

# Fondamentaux de la logique mathématique

- Discipline des mathématiques introduite à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle
- **Objet :**
  - l'étude des mathématiques en tant que langage
  - Etablir la valeur de vérité des propositions et de construire des raisonnements mathématiques

- La nécessité d'employer **un langage clair**, à l'abri d'ambiguïtés, pour écrire et démontrer des **énoncés mathématiques** est reconnue depuis l'Antiquité et par exemple la géométrie d'Euclide. La logique en tant que discipline mathématique prend son essor au XIXe siècle grâce aux travaux de mathématiciens tels que **Boole**, de **Morgan** et **Frege**.

# INTRODUCTION

La logique mathématique a été appelée par plusieurs noms, dont les plus importants sont

En	Fr	Ar
Mathematical logic	Logique mathématique	المنطق الرياضي
Symbolic Logic	Logique symbolique	المنطق الرمزي
Logistic	Logistique	المنطق
Algebra of Logic	Algèbre de la logique	الجبر المنطقي

# Notions élémentaires

## Notions élémentaires de logique formelle

Une logique est constituée des éléments suivants:

**Langage** : ce qui permet de définir les formules.

**Syntaxe ou système formel** : système de calcul purement syntaxique sur les formules formé d'Axiomes et de règles d'inférence

**Sémantique** : ce qui donne un sens aux formules



# Définitions

## Notions élémentaires de logique formelle

- **Une syntaxe**: système de symboles et de règles pour les combiner sous formes de formules.
- **Une sémantique** : permet d'interpréter, c'est-à-dire d'attacher aux formules ainsi qu'aux symboles une signification.
- **Un système de déduction** permet de raisonner en construisant des démonstrations.

# La logique classique

## La logique comprend classiquement

1. **la logique des propositions** (aussi appelée calcul des propositions),
2. **la logique des prédicats.**

Ces deux derniers points feront l'objet de notre cours.

## Part 3

# Logique des propositions

# CALCUL PROPOSITIONNEL

## Objectifs

---

- ✓ Comment écrire une formule (**syntaxe**)
- ✓ Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule (**sémantique**)
- ✓ Comment démontrer de nouveaux résultats (**déduction**)

# CALCUL PROPOSITIONNEL

## Définition

- ✓ On appelle logique propositionnelle la partie de la logique qui traite des **propositions** .
- ✓ L'un des buts de la logique propositionnelle est d'élaborer **un calcul** , que nous nommerons: calcul propositionnel .
- ✓ Cela entraîne que les propositions soient traitée comme **des variables**, désignées par des lettres (p, q, r,...) et que l'on introduise des **opérations** permettant de combiner les valeurs de ces variables.

## Proposition

### Qu'est ce qu'une proposition?

- ✓ Les propositions (contrairement aux **paradoxes** ) sont des affirmations qui ne peuvent être que vraies ou fausses.

Une proposition est une assertion (énoncé) qui peut être vraie ou fausse

Proposition

قضية

Paradoxe

مفارقة، تناقض

# CALCUL PROPOSITIONNEL

## Proposition

### Qu'est ce qu'une proposition?

Exemples :

- le ciel est vert
- les arbres sont jaunes
- Tous les hommes vont mourir
- Socrate est un menteur
- Tout nombre premier est impair
- $1+1=2$
- $4+5=3$
- $23<5$

# CALCUL PROPOSITIONNEL

## Proposition

### Qu'est ce qu'une proposition?

#### Contre exemples :

- Que venez vous faire ici ??(interrogative)
- Ah ! Je ne crois pas mes yeux ! (exclamative)
- Taisez vous (impérative)
- Cette phrase est fausse (paradoxe du menteur)



## Les paradoxes

### Qu'est ce qu'un paradoxe ?

- ✓ Le paradoxe est une affirmation qui contient une contradiction logique ( vraie et fausse en même temps ), ou un raisonnement qui, bien que sans faille apparente, aboutit à une absurdité , ou encore une situation qui contredit l'intuition commune.

Le paradoxe est une affirmation qui contient une contradiction logique ( vraie et fausse en même temps ),

## Variable propositionnelle

### Variable propositionnelle

- ✓ Une proposition (atome, proposition élémentaire) est représentée par **une variable**

Exemples :

- Tous les hommes vont mourir  $\equiv$  **P**
- Socrate est un menteur  $\equiv$  **Q**
- Tout nombre premier est impair  $\equiv$  **R**
- $1 + 1 = 2 \equiv$  **S**

## Variable propositionnelle

Soit  $P$  une proposition,  $P$  doit satisfaire les trois principes :

- ✓ **Principe d identité ( $P$  est  $P$ ):** si  $P$  est vrai alors  $P$  est vrai et si  $P$  est faux alors  $P$  est faux
- ✓ **Principe de non contradiction :**  $P$  ne peut pas à la fois être vrai et faux
- ✓ **Principe du tiers exclus :** si  $P$  est vrai, la négation de  $P$  est faux

## Connecteurs logiques

Les connecteurs sont des opérateurs permettent de construire de nouvelles propositions à partir d'une ou de plusieurs propositions initiales.

Connecteur	Opération	Exemple
$\neg$	Négation (non)	$\neg P$
$\wedge$	Conjonction (et)	$P \wedge Q$
$\vee$	Disjonction (ou)	$P \vee Q$
$\rightarrow$	Implication (implique)	$P \rightarrow Q$
$\leftrightarrow$	Equivalence (équivalent à)	$P \leftrightarrow Q$

Plus prioritaire



Moins prioritaire

## Table de vérité

### Table de vérité

- ✓ Une proposition peut prendre deux valeurs de vérité :
  - **VRAI** (V ou T) ou
  - **FAUX** (F)
- ✓ Il faut bien faire la distinction entre une proposition (qui est une phrase) et sa valeur (qui est soit VRAI soit FAUX)

P
T
F

## Table de vérité

### Table de vérité

C'est un énorme avantage de n'avoir que deux valeurs. En effet, si  $n$  propositions  $p_1, p_2, \dots, p_n$  entrent dans la définition d'un même " monde possible ", celui ci est complètement caractérisé par une situation des valeurs de vérité de ces propositions parmi  $2^n$  possibles.

Ainsi si nous avons 3 propositions:  $p, q, r$ , elles déterminent un ensemble de  $2 * 2 * 2$  situations a priori possibles, qui seront modélisées sous forme d'une table appelée Table de vérité

## Table de vérité

### Table de vérité

<b>P</b>	<b>Q</b>	<b><math>\neg P</math></b>	<b><math>P \wedge Q</math></b>	<b><math>P \vee Q</math></b>	<b><math>P \rightarrow Q</math></b>	<b><math>P \leftrightarrow Q</math></b>
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Thank you

